Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I

Derivadas – Cálculo de límites

Algunos consejos para calcular límites.

- Antes de empezar a calcular un límite funcional, simplifica todo lo que puedas la función y no escribas el símbolo “lím” hasta que no tengas una idea clara de cómo vas a hacer los cálculos.
- Trata de reducir el límite a otros bien conocidos. Para hacer eso debes recordar algunos límites que se repiten con frecuencia.

$$\begin{array}{lll}
\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=1, \\
\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}, & \lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha, \\
\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\dfrac{1}{6} & \lim_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}=1, \\
\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\dfrac{1}{3}, & \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1, & \lim_{x\to 0}\dfrac{x-\log(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}.
\end{array}$$

- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. Los límites anteriores proporcionan las equivalencias asintóticas más útiles. ¡Ojo! En una suma no puedes, en general, hacer eso.
- Cada vez que apliques las reglas de L’Hôpital comprueba que puedes hacerlo, es decir que se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$. Cada vez que derives al aplicar dichas reglas debes simplificar la expresión obtenida antes de volver a derivar.
- En general, no descompongas un límite como suma o producto de otros dos, pero si quieres hacerlo tienes que asegurarte de que dichos límites existen.
- Debes saber usar el criterio de equivalencia logarítmica que resuelve con frecuencia indeterminaciones del tipo 1^∞ y 0∞.

1. Calcula el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=(\operatorname{sen} x+\cos x)^{1/x},\ \ a=0; & f(x)=(1+\operatorname{tg} x)^{1/x^2},\ \ a=0 \\
f(x)=(\cot x)^{\operatorname{sen} x},\ \ a=0; & f(x)=\left(\cos^2 x+\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/x^2},\ \ a=0 \\
f(x)=(1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x},\ \ a=0; & f(x)=\dfrac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2},\ \ a=\pi/2 \\
f(x)=\dfrac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{sen}^3 x},\ \ a=0; & f(x)=\dfrac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc\,tg} x)-x^2}{x^6},\ \ a=0 \\
f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\cos\sqrt{2}\,x-x}{\operatorname{tg}^2 x},\ \ a=0; & f(x)=\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)},\ \ a=0
\end{array}$$

2. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x\operatorname{sen}x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen}x-\operatorname{sen}x}{x(1-\cos x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen}x-3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x^2}$$

3. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones.

   a) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{1/(x^2-1)},\ f(1)=\sqrt{e}$.

   b) $f:]-1/2,+\infty[\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+e^x)^{1/x},\ f(0)=e^2$.

   c) $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}\ f(x)=(1+x\log x)^{1/x},\ f(0)=0$.

   d) $f:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}\ f(x)=\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x^2},\ f(0)=e^{-1/6}$.

   e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(1+x^2\right)^{\operatorname{sen}(1/x)},\quad f(0)=1$.

   f) $f:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}\ f(x)=\left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{1/x},\ f(0)=1$.

4. Calcula los límites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^{2x}+x\,e^x-2\,e^{2x}+2\,e^x}{(e^x-1)^3} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)^{\frac{1}{\log x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+\operatorname{sen}2x)\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}^3 x)}{(e^x-1)(1-\cos^2(\operatorname{tg}^2 x))} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$$

5. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}x-\operatorname{sen}x}{x(1-\cos x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen}x^2)}{(e^{2x}-1)\log(1+2x)}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen}x-3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

6. Sean $f,g:]-1,\infty[\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=\frac{\log(1+x)}{x},\ f(0)=1;\quad g(x)=e^{f(x)}$$

   Calcula las derivadas primera y segunda de f y g en 0 y deduce el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e+\dfrac{e}{2}x}{x^2}$$